



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»  
(ДГТУ)**

Факультет Машиностроительные технологии и оборудование  
Кафедра Технологии формообразования и художественная обработка  
материалов

**ЗАДАНИЯ**  
к контрольной работе  
по дисциплине  
**«Математическое моделирование предельных состояний твердого тела»**

Ростов–на–Дону, 2024

Задания студентам заочной формы обучения  
к контрольным работам по дисциплине  
«Математическое моделирование предельных состояний твердого тела»

Программа дисциплины «Математическое моделирование предельных состояний твердого тела» составлена в соответствии с требованиями основной образовательной программы, сформированной на базе Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по направлению 15.03.01 Машиностроение по профилю подготовки «Информационные технологии обработки металлов давлением».

Контрольная работа состоит из двух теоретических вопросов рабочей программы по дисциплине «ММПСТТ» и решения двух задач по заданному условию.

Номер задания выбирается по сумме последних двух цифр номера зачетной книжки.

Вариант №1

1. Гипотеза «единой кривой». Понятие простого нагружения
2. Физический и геометрический смысл условия пластичности.
3. Три образца из различных материалов нагрузили таким образом, что напряженное состояние описывается тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} 520 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -520 \end{vmatrix}$$

Определить в каком состоянии находятся образцы, если для них  $\sigma_T$  равно 450, 500, 550 МПа соответственно.

4. Стандартный длинный образец диаметром 10мм растянули до перехода в первое предельное состояние и разгрузили. Определить длину образца под нагрузкой и после разгрузки, если сталь малоуглеродистая, у которой  $\sigma_{0,2}=350\text{МПа}$ , а  $E=2 \times 10^5\text{МПа}$

Вариант №2

1. Вывод закона парности касательных напряжений.
2. Малые деформации (вывод формул).
3. Построить диаграмму Мора для элементарной площадки, находящейся под действием полного напряжения величиной 300 МПа и касательного

напряжения равного 120 МПа. Углы наклона площадки относительно главных осей равны 30° и 60°

4. Стандартный длинный образец диаметром 6мм из стали 12Х18Н10Т растягивают в условиях сверхпластичности с переменной скоростью. Через определенные промежутки времени фиксируют скорость деформации  $\dot{\varepsilon}$ , площадь поперечного сечения образца  $F$  и силу деформации  $P$ :

$\dot{\varepsilon}, \text{с}^{-1}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-1}$
$F, \text{м}^2$	18,8	15,7	13,5	11,8	10,5	9,42
$P, \text{кН}$	0,662	0,667	0,679	0,854	1,31	1,91

Построить графики зависимостей:  $\sigma(\dot{\varepsilon})$  и  $\sigma(\psi)$

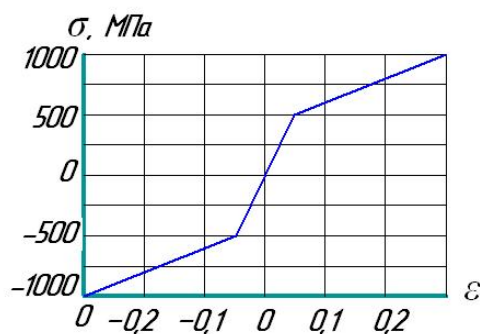
### Вариант №3.

1. Определение напряжений в наклоненных площадках.
2. Вывод зависимостей между напряжениями и деформациями за пределом упругости.
3. Плоскую листовую заготовку из стали 08КП ( $\sigma_T = 246 \text{ МПа}$ ) нагрузили так, что ее напряженное состояние описывается тензором напряжений.

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

Каким должно быть напряжение  $\sigma_3$ , чтобы заготовка деформировалась пластически.

4. По заданному графическому изображению модели сплошной среды



- силу растяжения и сжатия образцов диаметром 10мм и длиной 100мм до степени деформации 0,2;
- силу, необходимую для растяжения и сжатия указанных образцов на 6мм.

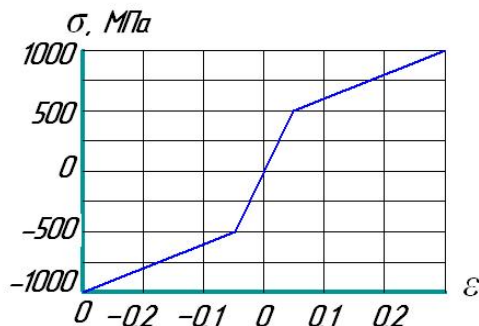
### Вариант №4

1. Условия пластичности Губера-Мизеса и Треска-Сен-Венана-Леви.
2. Главные нормальные напряжения. Инвариантные характеристики напряженного состояния (вывод формул).

3. Прямоугольная заготовка с начальными размерами  $B=200\text{мм}$ ,  $L=250\text{мм}$ ,  $H=10\text{мм}$  получила деформацию определенную тензором  $T\varepsilon$ . Найти ее конечные размеры, если:

$$T\varepsilon = \begin{vmatrix} 0,05 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & -0,05 \end{vmatrix}$$

4. По заданной модели сплошной среды



определить ее параметры и силу необходимую для растяжения и сжатия образцов диаметром 10мм и длиной 20мм до степени деформации 0,1. Установить, какая сила потребуется для растяжения и сжатия указанных образцов на 5мм.

#### Вариант №5.

1. Построение диаграммы напряжений Мора.
2. Конечные деформации, приращение длины линейного элемента.
3. В точке М деформируемого тела заданы: среднее напряжение  $\sigma_{\text{ср}} = -185\text{МПа}$ , главные касательные напряжения  $\tau_{12} = 156\text{МПа}$ ;  $\tau_{23} = -392\text{МПа}$ ;  $\tau_{31} = 236\text{МПа}$ . Вычислить компоненты тензора главных напряжений  $T_\sigma$ .
4. При испытании на растяжение стандартного образца длиной 100мм и диаметром 10мм, получили следующие результаты:

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{\text{мм}}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Алюминий	6,1	6,5	6,8	7,2	7,6	7,9	8,1	8,3

Составить таблицу расчетных значений « $\sigma$ » и « $\varepsilon$ » и построить график функции « $\sigma=f(\varepsilon)$ ».

#### Вариант 6.

1. Понятие тензора напряжений, шарового тензора, девиатора напряжений, их физический смысл. Инварианты тензора напряжений, девиатора напряжений.
2. Основные понятия о предельном состоянии. Четыре теории прочности.
3. Образец, имеющий размеры  $h_0 \times b_0 \times l_0 = 1 \times 2 \times 4\text{см}$ , подвергнут осадке с относительной деформацией по высоте  $l_h = \frac{\Delta h}{h_0} = 0,1$ . Принимая объем

неизменным и напряженное состояние одноосным, определить размеры образца после осадки.

4. Стандартный металлический образец диаметром 10 мм и длиной 100 мм, растянули до момента образования шейки. Построить диаграммы условных и истинных напряжений и графически определить предел прочности материала по кривой упрочнения первого рода при условии, что в момент образования шейки его длина равна 120мм, а сила изменяется согласно табличным данным. Сравнить полученные кривые.

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Медь	20,6	20,9	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0	22,02

#### Вариант №7.

1. Скорости деформаций и их тензорные характеристики.
2. Октаэдрические напряжения (вывод формул).
3. Напряженное состояние в некоторой точке деформируемого тела определено тензором напряжений

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Изменив схему напряжений, на тело наложили дополнительное гидростатическое давление равное  $-P$ . Показать, как изменились компоненты тензора  $T_{\sigma}$  и интенсивность напряжений.

4. Зависимость  $\sigma_s(\varepsilon)$  для образца диаметром 10мм с рабочей частью длиной  $l_0 = 100$ мм задана в виде:

$$\sigma_s = 7,1 \times 10^4 \varepsilon_T, \text{ если } \varepsilon \leq 0,007 \quad (\text{МПа})$$

$$\sigma_s = 497 + 8,07 \times 10^4 (\varepsilon - \varepsilon_T), \text{ если } \varepsilon > \varepsilon_T, \varepsilon > 0,007 \quad (\text{МПа})$$

Определить, по одной из приведенных формул и рассчитать:

- напряжение  $\sigma_T$ , соответствующее началу перехода от упругой деформации к пластической деформации (при  $\varepsilon = 0,0002$ );
- напряжения при растяжении образца до  $l_d = 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120$ мм;
- построить график  $\sigma_s(\varepsilon)$ , используя расчетные данные

#### Вариант №8.

1. Понятия ползучести, последействия, релаксации.
2. Главные касательные напряжения (вывод формул). Площадки действия главных касательных напряжений.
3. В точке тела заданы компоненты деформации  $\varepsilon_x$   $\varepsilon_y$   $\varepsilon_{xy}$ , а остальные компоненты равны нулю. Записать инварианты тензора деформаций и вывести формулы для главных деформаций.

4. При испытании на растяжение стандартного образца длиной 100мм и диаметром 10мм, получили следующие результаты:

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Латунь	26,8	29,9	32,1	34,9	35,6	37,6	38,1	37,9

Составить таблицу расчетных значений « $\sigma$ » и « $\varepsilon$ » и построить график функции « $\sigma=f(\varepsilon)$ ».

#### Вариант №9.

1. Эллипсоид напряжений Ламэ.
2. Математическое понятие тензора второго ранга.
3. Задан тензор напряжений в произвольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . Составить уравнение для определения главных напряжений  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ .
4. Стандартный длинный образец диаметром 6мм из стали 12Х18Н10Т растягивают в условиях сверхпластичности с переменной скоростью. Через определенные промежутки времени фиксируют скорость деформации  $\dot{\varepsilon}$ , площадь поперечного сечения образца  $F$  и силу деформации  $P$ :

$\dot{\varepsilon}, c^{-1}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-1}$
$F, м^2$	18,8	15,7	13,5	11,8	10,5	9,42
$P, кН$	0,662	0,667	0,679	0,854	1,31	1,91

Построить графики зависимостей:  $\sigma(\dot{\varepsilon})$  и  $\sigma(\psi)$

#### Вариант №10.

1. Дифференциальные уравнения движения и равновесия (вывод формул).
2. Вывод формул интенсивности касательных напряжений и интенсивности деформаций.
3. Деформация прямоугольной заготовки с размерами  $B=100мм, L=150мм, H=40мм$  описывается тензором:

$$T\varepsilon = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & -0,5 \end{vmatrix}$$

Определить конечные размеры заготовки через 0,1 сек после начала деформации.

4. При испытании на растяжение стандартного образца длиной 100мм и диаметром 10мм, получили следующие результаты:

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Медь	20,6	20,9	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0	22,1

Составить таблицу расчетных значений « $\sigma$ » и « $\varepsilon$ » и построить график функции « $\sigma=f(\varepsilon)$ ».

#### Вариант №11.

1. Понятие силы, внешние и внутренние силы, напряжения (принцип Сен-Венана, принцип напряжения Коши).

2. Скорости перемещений и скорости деформаций.

3. Для заданных напряжений  $T_{II} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}$

найти касательное октаэдрическое напряжение. Показать, что его величина в различных системах координат одинакова.

4. Стандартный металлический образец диаметром 10 мм и длиной 100 мм, растянули до момента образования шейки. Построить диаграммы условных и истинных напряжений и графически определить предел прочности материала по кривой упрочнения первого рода при условии, что в момент образования шейки его длина равна 120 мм, а сила изменяется согласно табличным данным. Сравнить полученные кривые.

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
4	Сталь 20	20,7	26,2	29,9	35,7	37,0	39,6	39,8	-

#### Вариант №12.

1. Элементы теории разрушения О.Мора, ее применение для оценки вероятности разрушения материалов, деформируемых в различных условиях.

2. Октаэдрические деформации и интенсивность деформаций (вывод)

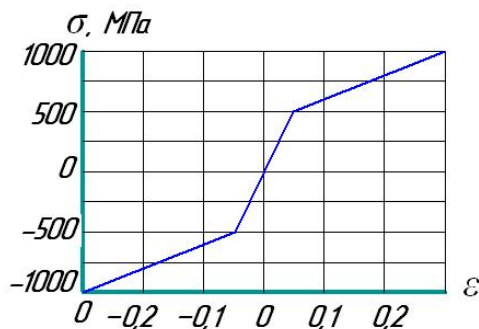
3. Задано напряженное состояние точки:

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} -275 & 16 & -52 \\ 16 & -42 & 34 \\ -52 & 34 & 620 \end{vmatrix}$$

Вычислить девиатор и шаровой тензор, определить нормальное, касательное и полное напряжение на площадке, нормаль к которой  $n$  составляет с осями координат углы с косинусами  $\cos(\hat{n}, x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

$$\cos(\hat{n}, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos(\hat{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

4. По заданной модели сплошной среды



определить ее параметры и силу необходимую для растяжения и сжатия образцов диаметром 10мм и длиной 20мм до степени деформации **0,3**. Установить, какая сила потребуется для растяжения и сжатия указанных образцов на 8мм.

### Вариант №13.

1. Вывод уравнения неразрывности деформаций.
2. Диаграмма растяжения материала и ее характеристики.

3. Задан тензор напряжений  $T_\sigma = \begin{vmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 10 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix}$ . Вычислить нормальное

напряжение  $\sigma$  и касательное напряжение  $\tau$  на площадке, нормаль к которой  $n$  составляет с осями координат углы с косинусами  $\cos(\hat{n}, x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

$$\cos(\hat{n}, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos(\hat{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

4. При испытании на растяжение стандартного образца длиной 100мм и диаметром 10мм, получили следующие результаты:

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Сталь Х18Н10Т	21,4	25,4	29,2	32,8	36,3	39,6	42,8	45,8

Составить таблицу расчетных значений « $\sigma$ » и « $\epsilon$ » и построить график функции « $\sigma=f(\epsilon)$ ».

### Вариант №14.

1. Материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная среда. Гипотеза сплошности однородность сплошной среды. Тела изотропные и анизотропные.
2. Определение главных нормальных напряжений. Понятие инвариантности, инварианты тензора напряжений,.
3. Тензор скоростей деформаций в некоторой точке и некотором базисе имеет матрицу компонент:

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} (1/c)$$



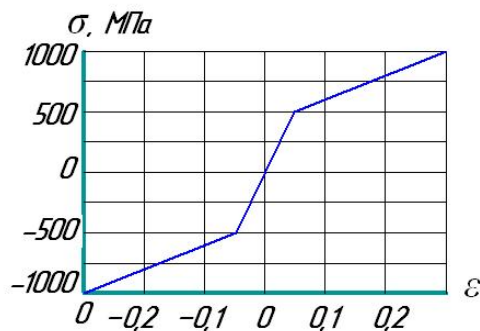
Определить, чему равны  $I_1 I_2 I_3$

4. Стандартный металлический образец диаметром 10 мм и длиной 100 мм, растянули до момента образования шейки. Построить диаграммы условных и истинных напряжений и графически определить предел прочности материала по кривой упрочнения первого рода при условии, что в момент образования шейки его длина равна 120мм, а сила изменяется согласно табличным данным. Сравнить полученные кривые.

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования $P$ (кН) при растяжении на $\Delta l$ мм							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
5	Сталь 40	42,9	52,4	58,4	62,1	63,5	64,2	65,4	65,2

#### Вариант №15.

1. Конечные деформации.
2. Аппроксимация экспериментальных кривых.
3. Из уравнения, выражающего обобщенный закон упругости, получить выражение закона Гука для одноосного растяжения.
4. По заданному графическому изображению модели сплошной среды



- силу растяжения и сжатия образцов диаметром 10мм и длиной 100мм до степени деформации 0,25;
- силу, необходимую для растяжения и сжатия указанных образцов на 7 мм.

#### Вариант №16.

1. Понятие краевой задачи. Аналитические, приближенные и численные методы решения краевых задач.
2. Понятие логарифмических деформаций. 4
3. Определить, находится ли точка в пластическом состоянии, если ее напряженное состояние описывается тензором  $T_\sigma$ , если предел текучести материала  $\sigma_T = 250$ МПа.

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} -271 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 94 \end{vmatrix}$$

4. При испытании на растяжение стандартного образца длиной 100мм и диаметром 10мм, получили следующие результаты:

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Латунь	26,8	29,9	32,1	34,9	35,6	37,6	38,1	37,9

Составить таблицу расчетных значений « $\sigma$ » и « $\varepsilon$ » и построить график функции « $\sigma=f(\varepsilon)$ ».

#### Вариант №17.

1. Условие постоянства объема и смещенный объем.
2. Плоское напряженное и плоское деформированное состояние твердого тела..
3. Образец, имеющий размеры  $h_0 \times b_0 \times l_0 = 1 \times 2 \times 4$  см, подвергнут осадке с относительной деформацией по высоте  $l_h = \frac{\Delta h}{h_0} = 0,1$ . Принимая объем неизменным и напряженное состояние одноосным, определить размеры образца после осадки.
4. Стандартный длинный образец диаметром 10мм растянули до перехода в первое предельное состояние и разгрузили. Определить длину образца под нагрузкой и после разгрузки, если сталь малоуглеродистая, у которой  $\sigma_{0,2} = 650 \text{ МПа}$ , а  $E = 2 \times 10^5 \text{ МПа}$

#### Вариант №18.

1. Дифференциальные уравнения неразрывности малых деформаций (вывод формул).
2. Влияние схемы напряженного состояния на пластичность и технологическую деформируемость.
3. Напряжения в данной точке тела:  $\sigma_1 = 30 \text{ Мн/м}^2$  ( $3,0 \text{ кГ/мм}^2$ );  $\sigma_2 = 20 \text{ Мн/м}^2$  ( $2,0 \text{ кГ/мм}^2$ );  $\sigma_3 = -10 \text{ Мн/м}^2$  ( $-1,0 \text{ кГ/мм}^2$ ). Каким пределом текучести должен обладать металл, чтобы при заданных напряжениях находиться в упругом состоянии? См вар. 19
4. Стандартный металлический образец диаметром 10 мм и длиной 100 мм, растянули до момента образования шейки. Построить диаграммы условных и истинных напряжений и графически определить предел прочности материала по кривой упрочнения первого рода при условии, что в момент образования шейки его длина равна 120мм, а сила изменяется согласно табличным данным. Сравнить полученные кривые.

№ п/п	Деформируемый материал	Усилие деформирования Р(кН) при растяжении на $\Delta l_{мм}$							
		2,5	5	7,5	10,0	12,5	15,0	17,5	20,0
1	Медь	20,6	20,9	21,2	21,4	21,6	21,8	22,0	22,02

Вариант №19.

1. Главные значения тензора второго ранга.
2. Кривые упрочнения первого и второго рода.
3. Напряжения в данной точке тела:  $\sigma_1=30 \text{ Мн/м}^2$  ( $3,0\text{кГ/мм}^2$ );  $\sigma_2=20 \text{ Мн/м}^2$  ( $2,0\text{кГ/мм}^2$ );  $\sigma_3=-10 \text{ Мн/м}^2$  ( $-1,0\text{кГ/мм}^2$ ). Каким пределом текучести должен обладать металл, чтобы при заданных напряжениях находиться в упругом состоянии?
4. Стандартный длинный образец диаметром 6мм из стали 12Х18Н10Т растягивают в условиях сверхпластичности с переменной скоростью. Через определенные промежутки времени фиксируют скорость деформации  $\dot{\varepsilon}$ , площадь поперечного сечения образца  $F$  и силу деформации  $P$ :

$\dot{\varepsilon}, \text{с}^{-1}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-1}$
$F, \text{м}^2$	18,8	15,7	13,5	11,8	10,5	9,42
$P, \text{кН}$	0,662	0,667	0,679	0,854	1,31	1,91

5.